

Les vecteurs sont désignés selon \vec{X} , X désignant la norme de \vec{X} . Pour tous les satellites terrestres, on prendra le rayon de la Terre $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km, l'intensité du champ de gravitation au niveau du sol proche de $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et la période de rotation de la Terre égale à $T_0 = 24$ h.

Exercices d'application : Mise en orbite, troisième loi de Kepler, modification d'orbites, deuxième vitesse cosmique, oscillateur harmonique spatial

Culture en sciences physiques : Mise en orbite, modification d'orbites, troisième loi de Kepler, deuxième vitesse cosmique, désorbitation, interaction coulombienne

Corrigés en TD : Mise en orbite, collision, modification d'orbites, oscillateur harmonique spatial, interaction coulombienne

Mouvements circulaires

Exercice 1 : Mise en orbite

On lance un satellite de masse m d'une base terrestre située à la latitude λ (on rappelle que la latitude est nulle à l'équateur et vaut 90° aux pôles).

1. Faire un schéma et déterminer sa vitesse dans le référentiel géocentrique avant le lancement.
2. En déduire l'énergie à lui communiquer pour le placer sur une orbite de rayon R en fonction de g , R_T , R , T m et λ .
3. Justifier ainsi la localisation des centres de lancement proches de l'équateur.

Exercice 2 : Troisième loi de Kepler

On précisera pour chaque situation étudiée le référentiel considéré galiléen dans lequel on étudie les mouvements. Tous les satellites considérés parcourent leurs orbites d'ouest en est et on considérera pour simplifier que celles-ci sont équatoriales (ie dans le plan de l'équateur) et circulaires. On recherchera les valeurs des paramètres orbitaux nécessaires.

1. (a) Combien de temps s'écoule-t-il entre le lever dans le ciel de la station spatiale internationale et son coucher. S'effectuent-ils à l'ouest ou à l'est ?
 (b) Mêmes questions pour le satellite « Vela 1A » dont l'orbite a pour altitude $100 \cdot 10^3$ km.
 (c) Quelle devrait être l'orbite d'un satellite pour qu'il se lève à l'est et se couche à l'ouest 48h plus tard.
2. L'opposition entre deux planètes orbitant un même astre est la configuration où les trois sont alignés, une planète étant entre l'autre et le soleil.
 (a) La dernière opposition entre Mars et la Terre était en octobre 2020. Déterminer quand se produira la prochaine opposition.
 (b) On souhaite envoyer depuis la Terre une sonde sur Mars en lui faisant parcourir une orbite képlérienne. Déterminer le grand-axe pour que l'énergie mécanique de la sonde soit la plus faible possible. Combien de temps durera le voyage entre la Terre et Mars

Exercice 3 : Désorbitation

On étudie l'effet, sur la trajectoire de la station spatiale internationale de masse m , des frottements de l'atmosphère ténue qui demeure à son altitude. On considère qu'initialement l'orbite est circulaire d'altitude h_{ISS} .

1. Justifier qualitativement que si les frottements sont suffisamment faibles, on pourra considérer que la station décrit une orbite circulaire de rayon R .
2. Montrer, en étudiant l'énergie mécanique, que le rayon R décroît lentement. Commenter le signe des variations de l'énergie potentielle \mathcal{E}_{pot} et de l'énergie cinétique \mathcal{E}_c . En quoi ce dernier résultat peut-il être surprenant ?
3. La force de frottement \vec{F} créée par l'atmosphère est d'intensité proportionnelle au carré de la vitesse v et s'exprime selon $\vec{F} = -\beta v \vec{v}$, avec β une constante positive. Déterminer, toujours sous l'hypothèse d'une trajectoire quasi circulaire, la variation d'énergie mécanique et la variation d'altitude à l'issue d'une révolution. Commenter la validité de l'hypothèse précédente.
4. (a) Pour éviter cette diminution, on peut utiliser les moteurs de la station. Calculer le travail qu'ils doivent fournir pendant une révolution pour maintenir l'altitude constante. Dans quel sens et dans quelle direction doit être dirigée la force qu'ils exercent ?
 (b) Le carburant est caractérisé par son pouvoir calorifique massique e , défini comme l'énergie libérée par la combustion d'une unité de masse. Calculer la masse de carburant brûlée par les moteurs par période de révolution, en supposant que la moitié de l'énergie thermique libérée peut être convertie en énergie mécanique.

Données : La constante β est de l'ordre de $1 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$, $m_{ISS} = 4,0 \cdot 10^5$ kg, $h_{ISS} = 4,0 \cdot 10^2$ km, $e = 2,7 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Autres mouvements keplériens

Exercice 4 : Modifications d'orbites

On considère un satellite M de masse m en orbite géostationnaire, dont on note R_0 le rayon.

1. Rappeler l'expression de son énergie mécanique, notée \mathcal{E}_{m0} , et du module de sa vitesse, noté v_0 , ainsi que la période de l'orbite.
2. L'utilisation de ses moteurs permet de faire varier quasi instantanément la vitesse du satellite.
 (a) On souhaite rendre son orbite elliptique, avec un demi-grand axe égal à $3R_0/4$. Représenter l'allure de la nouvelle trajectoire.
 (b) Établir l'expression de l'énergie mécanique sur la nouvelle trajectoire et en déduire le travail fourni par les moteurs.
 (c) Déterminer également la période de la nouvelle trajectoire en utilisant la troisième loi de Kepler.
3. Avec un travail plus important des moteurs on annule quasiment la vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique, alors qu'il était en orbite géostationnaire.
 (a) Décrire l'allure de la trajectoire.

- (b) Déterminer la nouvelle valeur de son énergie mécanique. En déduire le demi-grand axe de la nouvelle trajectoire
- (c) En déduire une estimation de la durée au bout de laquelle le satellite tombera sur la Terre, en utilisant de nouveau la troisième loi de Kepler.

Exercice 5 : Deuxième vitesse cosmique

On étudie quelques conséquences des valeurs de la deuxième vitesse cosmique, notée v_2 , relative à l'attraction gravitationnelle de différents astres.

1. Rappeler l'expression de la deuxième vitesse cosmique pour un point matériel situé à la surface d'un astre de masse m et de rayon R .
2. Calculer sa valeur pour les attractions du Soleil, de la Terre, de la Lune et du satellite de Mars Phobos, de masse $m_p = 1,8 \cdot 10^{-9} m_T$ et de rayon $R_p = 1,7 \cdot 10^{-3} R_T$. On les considérera tous à symétrie sphérique.
 - (a) Un spationaute peut-il échapper, en courant ou en sautant, à l'attraction de la Terre, de la Lune, de Phobos ?
 - (b) Justifier que les moteurs de retour (trajet de la Lune vers la Terre) des missions Apollo étaient plus petits que ceux du trajet aller.
 - (c) Dans un gaz de molécules de masse molaire M (exprimée en $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$) à la température T (exprimée en K), l'énergie cinétique d'agitation moyenne des particules correspond à une vitesse $v = \sqrt{3RT/M}$. Calculer la vitesse v_{N_2} pour le diazote sur la Terre ($T = 3 \cdot 10^2 \text{ K}$), sur la Lune ($T_{\text{max}} = 4 \cdot 10^2 \text{ K}$), sur Phobos ($T = 2 \cdot 10^2 \text{ K}$). On a donné des ordres de grandeur des températures de surface. Que peut-on en conclure quant à la présence d'une atmosphère sur ces astres ?
 - (d) On imagine que la masse de la Terre est concentrée dans une sphère de rayon $R_n < R_T$. Calculer la valeur de R_n (dit rayon de Schwarzschild) pour laquelle la vitesse de libération est celle de la lumière. La densité de l'astre ainsi constitué est alors celle d'un trou noir.

Exercice 6 : Interaction coulombienne

1. On étudie le mouvement classique de l'électron d'un atome d'hydrogène autour du noyau considéré immobile.
 - (a) Déterminer le rayon et le moment cinétique pour une orbite circulaire d'énergie mécanique $-13,6 \text{ eV}$. On note respectivement a_B et σ_B leurs valeurs.
 - (b) Exprimer de même l'énergie et le rayon d'orbites circulaires sur lesquelles le moment cinétique vaut $\sigma_n = n\sigma_B$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On étudie le mouvement d'une particule α (noyau d'Helium IV) lancée depuis l'infini vers un noyau atomique de numéro atomique Z considéré ponctuel. On note v_∞ sa vitesse quand la particule α est à l'infini du noyau et b son paramètre d'impact. On utilisera les valeurs des constantes et grandeurs nécessaires.
 - (a) Établir l'expression de la distance minimale à laquelle elle s'approchera. Calculer sa valeur pour un paramètre d'impact nul, pour une vitesse $v_\infty = 1,5 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et pour un noyau d'or $Z = 79$ et comparer à la taille d'un atome.
 - (b) Dans le modèle de Thomson de l'atome, les charges positives du noyau occupent tout le volume de l'atome. Par conséquent, si on note R son rayon la norme de la force électrostatique qu'il exerce est toujours inférieure à sa valeur à sa « surface », ie à la distance R de son centre.
 - Tracer l'allure de la trajectoire pour un paramètre d'impact non nul, dans le cas d'une faible déviation et établir l'expression de la vitesse minimale au cours du mouvement, notée v_{min} . On utilisera le paramètre sans dimension : $\beta = Ze^2 / (\pi \epsilon_0 m v_\infty^2 b)$.

- Justifier que la variation de la quantité de mouvement \vec{p} à l'issue de l'interaction s'écrit :

$$\Delta \vec{p} = \int_{t=-\infty}^{\infty} \vec{F} dt,$$

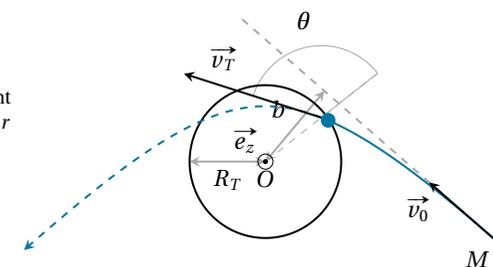
avec \vec{F} la force électrostatique subie par la particule α .

- En majorant la durée d'interaction par $2R/v_{\text{min}}$ et en majorant la norme de la force, obtenir une borne supérieure sur $|\Delta \vec{p}|$ puis une borne supérieure sur l'angle de déviation dont on calculera la valeur pour les paramètres précédents et pour un rayon $R = 1,79 \text{ \AA}$ pour un noyau d'or.

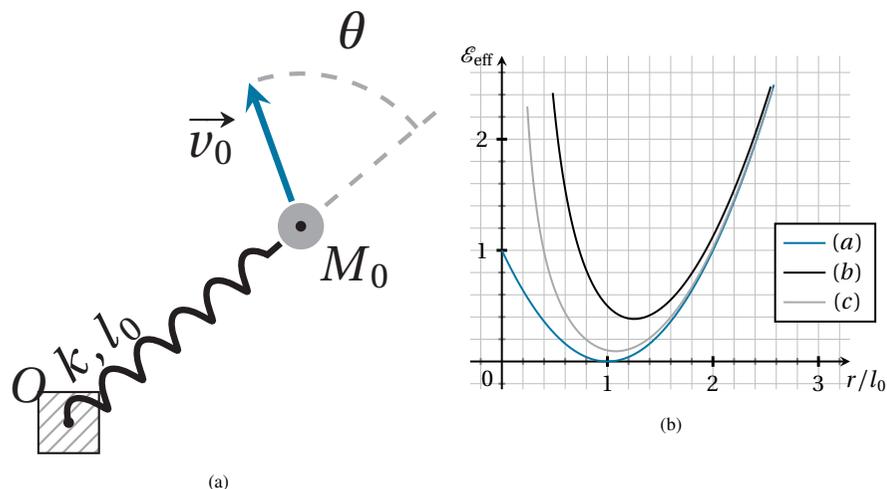
Historiquement, l'expérience de l'équipe de E. Rutherford en 1911 a observé des déviations supérieures à 90° , invalidant ainsi le modèle de Thomson et conduisant au modèle actuel dans lequel le noyau est de taille très inférieure à l'atome.

Exercice 7 : Collision

On étudie le mouvement d'un astéroïde M se rapprochant de la Terre de centre O , en provenant de l'infini. On note r la distance OM , qui tend initialement vers l'infini. L'étude est effectuée dans le référentiel géocentrique.



1. Quelle est la nature du mouvement de M quand r tend vers l'infini ?
2. On note \vec{v}_0 sa vitesse à l'infini. Exprimer son moment cinétique par rapport à O , noté $\vec{\sigma}_{IO}(M)$ quand il est à l'infini en fonction des paramètres du schéma. Quelle est l'évolution de $\vec{\sigma}_{IO}(M)$? La distance b est nommée « paramètre d'impact ».
3.
 - (a) Rappeler l'expression de l'énergie potentielle effective de l'astéroïde et tracer son allure en fonction de r . Représenter sur cette courbe la distance minimale r_{min} de O à laquelle passera M .
 - (b) Quelle est l'énergie mécanique de l'astéroïde quand il est à l'infini ? En déduire, par conservation de l'énergie mécanique, l'expression de r_{min} .
 - (c) En déduire à quelle condition l'astéroïde évitera la Terre, de rayon R_T . Exprimer en particulier la vitesse minimale notée $v_{\text{min}}(b)$ pour une valeur de b donnée. On l'exprimera en fonction de la deuxième vitesse cosmique relative à l'attraction gravitationnelle de la Terre, notée v_2 .
 - (d) Calculer v_{min}/v_2 pour $b = 60R_T$, correspondant à l'orbite de la Lune.
4. On considère maintenant que $v_0 = v_{\text{min}}(b)/\sqrt{2}$.
 - (a) Utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour déterminer le module v_T de la vitesse de M quand il atteint la Terre. On l'exprimera de nouveau en fonction de v_2 , b et R_T .



- (b) Utiliser la conservation du moment cinétique pour déterminer l'angle θ du vecteur vitesse $\vec{v}(M)$ avec la normale à la surface de la Terre au moment de l'impact.
- (c) Calculer ces grandeurs pour $b = 60R_T$.

Force centrale conservatrice quelconque

Exercice 8 : Oscillateur harmonique spatial

On considère un point matériel M en mouvement sans frottement sur un plan horizontal. Il est lié par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 à un point O fixe du référentiel. On note r la distance OM (Figure 1a).

- Justifier que le mouvement est conservatif et que l'on peut l'étudier à l'aide d'une énergie potentielle effective fonction de r .
- À l'instant initial, le point M se trouve à la distance $r_0 = 0,8l_0$, animé d'une vitesse de module v_0 . La Figure 1b représente les courbes correspondant à différentes valeurs de l'angle θ_0 entre le vecteur vitesse initial et le vecteur \vec{OM} initial, en gardant r_0 et v_0 fixés.
 - Quelle est la courbe qui peut correspondre à $\theta_0 = 0$? Quelle est celle qui peut correspondre à $\theta_0 = \pi/2$?
 - Que peut-on dire de \dot{r} quand les vecteurs \vec{v} et \vec{OM} sont orthogonaux? En déduire dans le cas $\theta_0 = \pi/2$ les valeurs minimale et maximale de r atteintes au cours du mouvement ainsi que la valeur de l'énergie mécanique.
 - Même question pour la courbe (c).

- (d) Sur cette dernière courbe, décrire le mouvement selon que $\theta_0 > \pi/2$ ou $\theta_0 < \pi/2$.

Exercice 9 : Période d'un mouvement lié à l'aide de \mathcal{E}_{eff}

On considère le mouvement d'un point matériel de position M soumis dans un référentiel galiléen à une force centrale de centre O conservatrice à laquelle est associée l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{\text{pot}}(r)$, avec $r = OM$. On cherche dans cet exercice à obtenir une expression formelle de la période d'un mouvement lié.

- Rappeler la définition de $\mathcal{E}_{\text{eff}}(r)$. En quoi n'est-elle pas une véritable énergie potentielle?
 - Comment définir les zones de l'espace accessibles pour un mouvement de moment cinétique en O , noté σ_c , donné? Utiliser les intégrales premières du mouvement d'un point matériel de masse m soumis à une force centrale conservatrice pour exprimer \dot{r}^2 en fonction de r , de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m et de la masse m du point matériel.
- À l'instant $t = 0$ le P.M. se trouve à la distance r_0 du centre O . Établir une relation de la forme $t = G(r)$ en notant r la distance à un instant ultérieur t . Quelle condition doivent vérifier les variations de r pour que cette relation soit valable?
 - À l'instant $t = 0$, la position du P.M. était également repérée par l'angle θ_0 . Déterminer la relation entre l'angle θ à un instant ultérieur en fonction de la distance r de la forme : $\theta - \theta_0 = H(r)$.
 - Dans le cas où le mouvement est contraint entre deux cercles de rayon r_m et $r_M > r_m$, à quelle condition la trajectoire est-elle fermée? Donner alors l'expression de la période du mouvement.

Correction de l'exercice 1

- Le satellite, immobile dans le référentiel terrestre décrit dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_{geo} un cercle de rayon $R_T \cos \lambda$ en $T = 24$ h. Sa vitesse v_0 vaut donc $v_0 = \frac{2\pi R_T \cos \lambda}{T}$.
- Son énergie cinétique initiale vaut, dans \mathcal{R}_{geo} , $\mathcal{E}_{\text{cin}0} = \frac{2\pi^2 m R_T^2 \cos^2 \lambda}{T^2}$, soit une énergie mécanique $\mathcal{E}_{\text{m}0} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{R_T} + \mathcal{E}_{\text{cin}0} \approx -mgR_T + \mathcal{E}_{\text{cin}0}$. Sur l'orbite circulaire, elle vaudra $\mathcal{E}_{\text{m}} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}M_T m}{R} \approx -\frac{mgR_T^2}{2R}$, on aura donc du lui communiquer l'énergie $\Delta \mathcal{E}_{\text{m}} = \mathcal{E}_{\text{m}} - \mathcal{E}_{\text{m}0} = mgR_T \left(1 - \frac{R_T}{2R}\right) - \mathcal{E}_{\text{cin}0}$, d'autant plus faible que $\mathcal{E}_{\text{cin}0}$ est élevée.
- On a donc intérêt à placer les centres de lancement proches de l'équateur où $\cos \lambda$ est maximal pour maximiser $\mathcal{E}_{\text{cin}0}$.

Correction de l'exercice 2

- (a) On étudie les mouvements dans le référentiel géocentrique. La Terre, de masse M_T , y décrit un mouvement de rotation d'une durée de $T_T = 24$ h d'ouest en est avec une vitesse de rotation qui vaut donc $\omega_T = 2\pi/T_T = +7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
La période de l'ISS dans ce référentiel, notée T_{ISS} est donnée par la troisième loi de Kepler et permet d'y calculer sa vitesse de rotation $\omega_{\text{ISS}} = 2\pi/T_{\text{ISS}}$. En notant R_T le rayon de la Terre et $h_{\text{ISS}} \approx 300$ km l'altitude de l'orbite, le rayon de l'orbite de l'ISS est $R_{\text{ISS}} = R_T + h_{\text{ISS}}$ et on a :

$$\frac{T_{\text{ISS}}^2}{(R_{\text{ISS}} + h_{\text{ISS}})^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T} \rightarrow \omega_T = \frac{2\pi}{T_T} = +1,15 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

L'ISS tourne donc plus vite que la Terre et sa vitesse de rotation dans le référentiel terrestre est $\omega_{\text{ISS}} - \omega_T$ et sa période y est $2\pi/(\omega_{\text{ISS}} - \omega_T)$.

De plus, la figure ci-contre montre que l'angle parcouru entre le lever et le coucher à l'horizon a pour expression, en supposant évidemment que l'observation se fait depuis une altitude négligeable devant h_{ISS} .

$$2\theta = 2 \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right) = 0,60 \text{ rad} = 34^\circ.$$

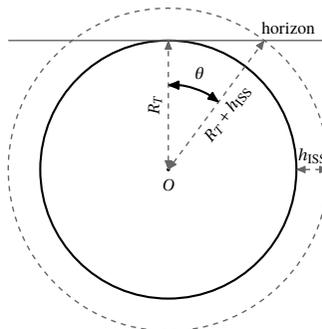
On calcule donc la durée :

$$\frac{2\theta}{\omega_{\text{ISS}} - \omega_T} = 9 \text{ min.}$$

Notons que le calcul est en fait plus compliqué car il dépend de la latitude, et de l'inclinaison de l'orbite de la station par rapport au plan équatorial.

- Pour Vela 1A, on calcule de même :

$$\frac{T_V^2}{(R_T + h_V)^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T} \rightarrow \omega_T = \frac{2\pi}{T_V} = +1,8 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$



Il tourne donc moins vite que la Terre et se lève donc à l'est pour se coucher à l'ouest, comme le Soleil. Ce sera le cas pour tout satellite orbitant au-delà de l'orbite géostationnaire.

Ici l'angle 2θ vaut approximativement π en raison de la grande altitude du satellite.

On calcule donc :

$$\frac{\pi}{\omega_T - \omega_V} = 16 \text{ h.}$$

- On doit être au-delà de l'orbite géostationnaire et on veut, toujours en faisant l'hypothèse que l'orbite est élevée pour avoir $2\theta \approx \pi$:

$$\frac{\pi}{\omega_T - \omega_X} = 48 \text{ h} \equiv T_0 \rightarrow T_x = \frac{2T_0 T_T}{2T_0 - T_T} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R_T + h_X)^3}{\mathcal{G}M_T}} \rightarrow h_X = 45 \cdot 10^3 \text{ km.}$$

- On étudie les mouvements dans le référentiel héliocentrique.

- (a) Le rayon de l'orbite de la Terre est 1 au par définition, celle de Mars est 1,52 au. Les périodes respectives de la Terre et de Mars sont alors :

$$T_T = 1 \text{ année} \quad T_M = T_T \left(\frac{R_M}{R_T}\right)^{3/2} = 1,9 \text{ année.}$$

Dans cette question T désigne la période de révolution autour du Soleil et plus la période de rotation dans le référentiel géocentrique.

La Terre tourne donc plus vite que Mars, elles tournent par ailleurs toutes les deux dans le même sens, dit «prograde». Elles seront de nouveau en opposition quand la Terre aura fait exactement un tour de plus que Mars autour du Soleil, soit au bout d'une durée Δt telle que :

$$(\omega_T - \omega_M) \Delta t = 2\pi \rightarrow \Delta t = \frac{1}{1/T_T - 1/T_M} = \frac{T_M T_T}{T_M - T_T} = 2,1 \text{ année.}$$

La prochaine opposition se produira donc autour de décembre 2022.

- (b) L'énergie sur une orbite elliptique est $-\mathcal{G}mM_S/(2a)$ avec $2a$ le grand axe. Elle sera minimale si ce dernier est minimal, soit si elle est tangente aux orbites circulaires de Mars et de la Terre. Son périhélie doit donc être sur l'orbite de la Terre et son aphélie sur celle de Mars. Son grand axe sera donc $R_T + R_M$. La troisième loi de Kepler pour les orbites elliptiques donnera donc un voyage de durée Δt_v égale à une demi-période soit :

$$\Delta t_v = \frac{T_T}{2} \left(\frac{R_T + R_M}{2R_T}\right)^{3/2} = 0,71 \text{ année} = 258 \text{ d.}$$

Correction de l'exercice 3

- Si la variation d'altitude sur une révolution est négligeable devant la distance en début de révolution, on peut considérer que la trajectoire a été pratiquement circulaire.
- La station est soumise à la force de gravitation, centrale et conservative, et à la force de frottement, non conservative.

La puissance de la force de frottement est négative, et le théorème de l'énergie mécanique donne $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}) < 0$: l'énergie mécanique décroît donc. Comme elle est négative, sa valeur absolue croît. En supposant l'orbite quasi circulaire, on a toujours $\mathcal{E}_m = -\mathcal{G}m_T m_{ISS}/(2R)$: on en conclut que R décroît, tout comme \mathcal{E}_{pot} .

De même, les relations des orbites circulaires donnent à chaque instant $\mathcal{E}_m = -\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\text{pot}}$: l'énergie cinétique est donc croissante bien que les frottements soient résistants.

3. La vitesse étant quasiment constante à $v_{ISS} = \sqrt{\mathcal{G}m_T/R_{ISS}} = \sqrt{-2\mathcal{E}_m/m_{ISS}}$ sur une révolution de périmètre $2\pi R_{ISS}$, le travail de la force de frottement est :

$$W(\vec{F}) = -\beta v_{ISS}^2 2\pi R_{ISS} = \frac{4\pi\beta R_{ISS}\mathcal{E}_m}{m_{ISS}} \leq 0.$$

puisque la force est d'intensité constante et toujours colinéaire et de sens opposé à la vitesse.

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit donc, au cours d'une révolution où l'énergie mécanique varie de $\Delta\mathcal{E}_m$:

$$\Delta\mathcal{E}_m = \frac{4\pi\beta R_{ISS}\mathcal{E}_m}{m_{ISS}} \text{ soit : } \left| \frac{\Delta\mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_m} \right| = -\frac{4\pi\beta R_{ISS}}{m_{ISS}} = 2,1 \cdot 10^{-6}.$$

On utilise les différentielles logarithmiques pour relier la variation élémentaire d'altitude Δh à la variation élémentaire d'énergie $\Delta\mathcal{E}_m$. On a en effet :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}m_T m_{ISS}}{2(R_T + h)} \text{ soit : } \frac{d\mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_m} = -\frac{dR_{ISS}}{R_{ISS}} = -\frac{dh}{R_T + h}.$$

Comme la variation relative de \mathcal{E}_m considérée est très faible, on peut appliquer également la relation précédente aux variations finies mais très petites : on a donc $\Delta\mathcal{E}_m/\mathcal{E}_m = -\Delta h/(R_T + h)$. La diminution relative de rayon est donc également de $2,1 \cdot 10^{-6}$, ce qui correspond à $\Delta h = -14\text{ m}$, bien négligeable par rapport à l'altitude de l'orbite.

4. (a) On calcule $\Delta\mathcal{E}_m = -2,3 \cdot 10^7\text{ J}$. Les moteurs doivent apporter cette énergie en exerçant une force tangente à la trajectoire, dirigée vers l'avant.
(b) La masse de carburant correspondante est $2|\Delta\mathcal{E}_m|/e = 2,0\text{ kg}$.

Correction de l'exercice 4

1. On a :

$$\mathcal{E}_{m0} = -\frac{\mathcal{G}mm_T}{2R_0} \quad v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_T}{R_0}} \quad T = 1 \text{ jour.}$$

2. (a) L'allure de la trajectoire est représentée sur la Figure 2.
(b) L'énergie d'un état lié s'exprime en fonction du demi-grand axe a selon : $\mathcal{E}_m = -\mathcal{G}m_T m/(2a)$, soit $\mathcal{E}_m = -2\mathcal{G}m_T m/(3R_0)$ ici. Le théorème de l'énergie mécanique assure que la variation d'énergie mécanique entre l'orbite géostationnaire et l'orbite elliptique est égale au travail W des moteurs. On a donc :

$$W = -\frac{2\mathcal{G}m_T m}{3R_0} + \frac{\mathcal{G}m_T m}{2R_0} = -\frac{\mathcal{G}m_T m}{6R_0}.$$

Il est bien évidemment négatif puisque l'on doit freiner le satellite pour qu'il « tombe » plus vite vers la Terre.

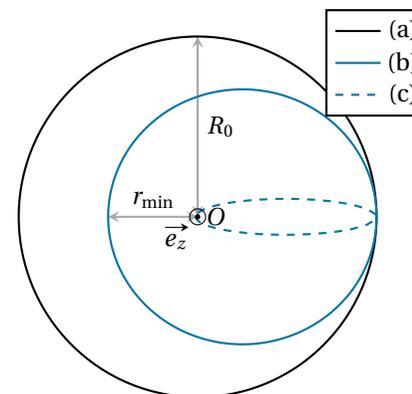


FIG. 2 : Trajectoires du satellite. Orbite géostationnaire (a), orbite de demi-grand axe $3R_0/4$ (b), orbite proche de celle correspondant à la chute sur la Terre (c).

- (c) En notant T_0 et T les périodes respectives de l'orbite géostationnaire et de l'orbite elliptique, on a :

$$\frac{T_0^2}{R_0^3} = \frac{T^2}{(3R_0/4)^3} \text{ soit : } T = T_0 \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} = 6,5 \cdot 10^{-1} \text{ jour} = 16 \text{ heure.}$$

3. (a) L'ellipse se réduit alors quasiment à un segment joignant le foyer de l'ellipse (le centre de la Terre) à l'apogée, où le satellite se trouvait initialement.
(b) L'énergie cinétique initiale étant négligeable, l'énergie mécanique a pour expression, à l'instant initial :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{\text{pot}} = -\frac{\mathcal{G}m_T m}{R_0}.$$

En notant a le demi-grand axe de cette ellipse, on a par ailleurs $\mathcal{E}_m = -\mathcal{G}m_T m/(2a)$, soit $a = R_0/2$.

- (c) On calcule alors comme précédemment :

$$\frac{T_0^2}{R_0^3} = \frac{T^2}{(R_0/2)^3} \text{ soit : } T = T_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} = 3,5 \cdot 10^{-1} \text{ jour} = 8,5 \text{ heure.}$$

La chute durera donc la moitié de cette période.

Correction de l'exercice 5

1. Comme vu en cours, on a $v_2 = \sqrt{2\mathcal{G}m/R}$.
2. Les valeurs données en cours permettent de calculer les vitesses rassemblées dans le tableau 1.

astre	Soleil	Terre	Lune	Phobos
$v_2 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$6,2 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^4$	$2,3 \cdot 10^3$	11
$v_{N_2} (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$		$5,4 \cdot 10^2$	$5,9 \cdot 10^2$	$4,2 \cdot 10^2$

Tab. 1 : Vitesses de libération v_2 et vitesses d'agitation thermique v_{N_2} pour le diazote.

- (a) Un homme n'est pas capable de courir à une vitesse de l'ordre du $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$: il ne pourra donc pas échapper à l'attraction de la Terre ou de la Lune. En revanche les $11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ sont accessibles à un coureur de 100m qui pourra donc échapper à l'attraction de Phobos.
- (b) La vitesse de libération est notablement plus faible sur la Lune que sur Terre : il faudra donc consommer beaucoup moins de carburant pour partir de la Lune que pour partir de la Terre (d'autant plus que les frottements avec l'atmosphère très ténue sur la Lune sont quasi inexistant).
- (c) Les vitesses d'agitation sont données dans le tableau 1. Celle sur la Terre est très inférieure à la vitesse de libération : la Terre conserve donc une atmosphère. En revanche les deux vitesses sont comparables sur la Lune : les gaz à sa surface s'en échappent très facilement et la pression à sa surface est très faible. Finalement, Phobos n'est pas capable de retenir une atmosphère.
- (d) La taille correspondante est extrêmement petite :

$$R_n = R_T \left(\frac{v_2}{c} \right)^2 = 8,6 \text{ mm.}$$

Correction de l'exercice 6

1. (a) La force a pour expression $-e^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)\vec{e}_r$. Les énergies mécanique et cinétique sur un mouvement circulaire uniforme de rayon a_B ont pour expression (en déterminant la vitesse avec la loi de la quantité de mouvement) :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B} \quad \mathcal{E}_{\text{cin}} = -\mathcal{E}_m = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_B} = \frac{m_e v_B^2}{2}$$

On en déduit le rayon et le moment cinétique :

$$a_B = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_m} = 0,53 \text{ \AA} \quad \sigma_B = \sqrt{\frac{m_e}{2|\mathcal{E}_m|}} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1,05 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

On montrera qu'en mécanique quantique, la valeur de σ_B est exactement \hbar la constante de Planck réduite.

- (b) On peut exprimer :

$$\mathcal{E}_{m_n} = -\frac{m_e}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sigma_n} \right)^2 \quad a_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \sigma_n^2}{m_e e^2}.$$

On constate que l'énergie et le rayon varient avec n selon :

$$\mathcal{E}_{m_n} = \frac{\mathcal{E}_{m1}}{n^2} \quad a_n = n^2 a_1.$$

2. (a) On écrit la conservation de l'énergie mécanique, avec $\mathcal{E}_{\text{pot}} = 2Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r)$. À l'état initial la vitesse vaut v_∞ et la distance r tend vers l'infini, on a donc $\mathcal{E}_m = mv_\infty^2$

En utilisant l'énergie potentielle effective, l'énergie mécanique a par ailleurs pour expression : $\mathcal{E}_m = m\dot{r}^2/2 + \sigma^2/(2mr^2) + Ze^2/(2\pi\epsilon_0 r)$, avec σ le moment cinétique constant, évalué à mbv_∞ au début et à la fin du mouvement. Au point le plus proche, on a $\dot{r} = 0$ et donc $\mathcal{E}_m = \sigma^2/(2mr^2) + Ze^2/(2\pi\epsilon_0 r)$. La conservation de l'énergie mécanique entre ces deux états s'écrit donc :

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2mr_{\text{min}}^2} + \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r_{\text{min}}} = \frac{mb^2 v_\infty^2}{2r_{\text{min}}^2} + \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r_{\text{min}}}.$$

La distance r_{min} est donc l'unique racine positive d'un trinôme :

$$\frac{r_{\text{min}}^2}{b^2} - \frac{Ze^2 r}{\pi\epsilon_0 mb^2 v_\infty^2} - 1 = 0$$

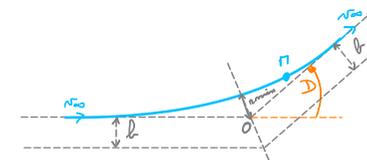
$$\frac{r_{\text{min}}}{b} = \frac{-\beta + \sqrt{4 + \beta^2}}{2} \quad \text{avec } \beta = \frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 mbv_\infty^2},$$

le facteur β étant sans dimension. Dans le cas $b = 0$, on calcule, sans résoudre le trinôme :

$$r_{\text{min}} = \frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 mv_\infty^2} = 49 \text{ fm,}$$

avec $m = 4m_p = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Cette taille est bien plus petite que celle d'un atome, de l'ordre de $1 \text{ \AA} = 1 \cdot 10^5 \text{ fm}$.

- (b) • Comme l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + Ze^2/(2\pi\epsilon_0 r)$ est conservée, l'énergie cinétique sera minimale quand l'énergie potentielle sera minimale, ie pour $r = r_{\text{min}}$. On aura donc, en utilisant de nouveau le paramètre β sans dimension :



$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv_\infty^2 \beta b}{2r} \rightarrow v_{\text{min}} = v_\infty \sqrt{1 - \beta \frac{b}{r_{\text{min}}}}.$$

- La loi de la quantité de mouvement donne immédiatement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \rightarrow \vec{p}(t = +\infty) - \vec{p}(t = -\infty) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \vec{F} dt.$$

- La norme de la force est majorée par sa valeur à la surface de la sphère de rayon R , soit $F_{\text{max}} = Ze^2/(2\pi\epsilon_0 R^2)$. On peut donc majorer :

$$|\Delta \vec{p}| \leq F_{\text{max}} \frac{2R}{v_{\text{min}}} = \frac{Ze^2}{\pi R \epsilon_0 v_{\text{min}}}.$$

On s'est placé dans le cas d'une faible déviation correspondant aux cas où v_∞ et b sont grands, soit $\beta \ll 1$, $r_{\text{min}} \approx R$ et donc $v_{\text{min}} \approx v_\infty(1 - \beta) \approx v_\infty$. Finalement : $|\Delta \vec{p}| \leq \frac{Ze^2}{\pi \epsilon_0 R v_\infty}$.

L'angle de déviation est l'angle entre $\vec{p}(-\infty)$ et $\vec{p}(+\infty) = \vec{p}(-\infty) + \Delta\vec{p}$. On vérifie par une construction géométrique de ces vecteurs qu'il est majoré par :

$$\arctan\left(\frac{\Delta p}{mv_\infty}\right) = \arctan\left(\frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 m R v_\infty^2}\right) \approx \frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 m R v_\infty^2} = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ rad.}$$

Correction de l'exercice 7

- La force de gravitation tend vers $\vec{0}$, le mouvement de l'astéroïde est donc rectiligne uniforme de vecteur vitesse noté \vec{v}_0 constant.
- Comme vu en cours, on a $\vec{\sigma}_{I\vec{O}}(M) = mbv_0\vec{e}_z$. Il sera conservé puisque la force est centrale. On pose $\|\vec{\sigma}_{I\vec{O}}(M)\| = \sigma_c$.
- (a) On a $\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{\sigma_c^2}{2mr^2} - \frac{\mathcal{G}m_T m}{r}$, dont la courbe est donnée sur la figure ci-contre, sur laquelle r_1 représente la distance minimale d'approche.

- (b) Son énergie potentielle étant nulle à l'infini, on a $\mathcal{E}_m = mv_0^2/2$. Au point de distance minimale, on a par définition $\dot{r} = 0$ et la conservation de \mathcal{E}_m entre l'infini et le point de distance minimale s'écrit :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{\sigma_c^2}{2mr^2} - \frac{\mathcal{G}m_T m}{r_{\min}} = \frac{mv_0^2 b^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}m_T m}{r_{\min}}$$

$$\text{soit : } r^2 + 2\frac{\mathcal{G}m_T}{v_0^2}r - b^2 = 0.$$

En posant $b_0 = \mathcal{G}m/v_0^2$, l'unique racine positive de ce trinôme est :

$$r_{\min} = \sqrt{b^2 + b_0^2} - b_0.$$

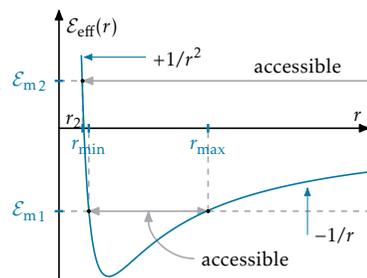
- (c) La collision sera évitée si $r_{\min} > R_T$. On a alors :

$$b_0 = \frac{b^2 - R_T^2}{2R_T} \text{ soit : } v_{\min}(b) = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_T}{R_T\left(\frac{b^2}{R_T^2} - 1\right)}}.$$

Avec $v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_T}{R_T}}$, on a finalement :

$$v_{\min}(b) = \frac{v_2}{\sqrt{\left(\frac{b}{R_T}\right)^2 - 1}}.$$

- (d) On calcule $v_{\min}/v_2 = 1,7\%$.



4. (a) L'énergie mécanique est maintenant :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{4}mv_{\min}^2 = \frac{mv_2^2}{4\left(\frac{b^2}{R_T^2} - 1\right)}.$$

On n'utilise pas cette fois-ci l'énergie potentielle effective puisque l'on ne cherche pas à distinguer le mouvement radial du mouvement angulaire. La conservation de l'énergie entre l'infini et l'impact s'écrit désormais :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_T^2 - \frac{\mathcal{G}m_T m}{R_T}$$

$$\frac{mv_2^2}{4\left(\frac{b^2}{R_T^2} - 1\right)} = \frac{1}{2}mv_T^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\text{soit : } v_T = v_2 \sqrt{\frac{b^2/R_T^2 - 1/2}{b^2/R_T^2 - 1}}.$$

- (b) Le moment cinétique au moment de l'impact s'exprime selon $\vec{\sigma}_{I\vec{O}}(M) = m\vec{OM} \wedge \vec{v}$. Sa norme est $mR_T v_T |\sin\theta|$. On a donc :

$$|\sin\theta| = \frac{bv_{\min}(b)/\sqrt{2}}{R_T v_T} = \frac{b}{R_T \sqrt{2\frac{b^2}{R_T^2} - 1}}.$$

- (c) L'angle θ étant supérieur à $\pi/2$ (figure précédente), on a $\theta = 180^\circ - 45^\circ$.

Correction de l'exercice 8

1. Sur un plan horizontal et sans frottement, le poids et la réaction du support se composent à chaque instant. La résultante des forces est la tension du ressort, centrale et conservative. On utilisera :

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{\sigma_c^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r - l_0)^2,$$

avec σ_c le module du moment cinétique par rapport à O , constant.

2. (a) Le module σ_c a pour expression $\sigma_c = \|\vec{OM}_0 \wedge \vec{v}_0\| = r_0 v_0 |\sin\theta_0|$. Il sera en particulier nul pour $\theta_0 = 0$ et la courbe de \mathcal{E}_{eff} sera alors une parabole : il s'agit de la courbe (a).

La courbe correspondant à $\theta_0 = \pi/2$ est celle pour laquelle le terme $\sigma_c^2/(2mr^2)$ est maximal à r fixé et modifie donc le plus la parabole. Il peut donc s'agir de la courbe (b).

- (b) En coordonnées polaires, on a $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. À un instant où \vec{v} est orthogonal à \vec{e}_r , \dot{r} est nécessairement nul : on a $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{\text{eff}}$ et la distance r est alors extrême.

On est dans cette situation pour la courbe correspondant à $\theta_0 = \pi/2$. On détermine ainsi l'origine du mouvement : il s'agit du point M_0 de la courbe 3, intersection de la courbe b avec la droite $x = 0,8l_0$. L'énergie mécanique est l'énergie potentielle effective en M_0 , on lit $\mathcal{E}_m = 1,8$.

L'autre extrémum est l'autre intersection de $\mathcal{E}_{\text{eff}}(r)$ la droite horizontale d'ordonnée 1,8, le point M'_0 .

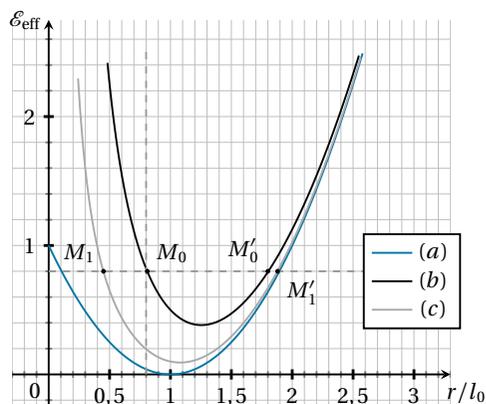


FIG. 3 : Détermination graphique des extrêmes des trajectoires.

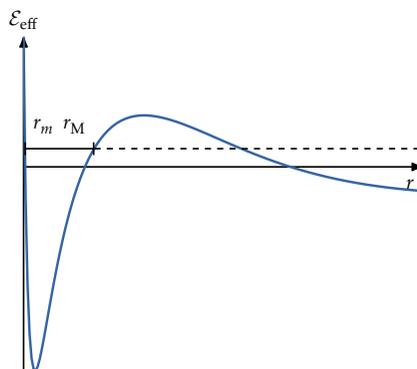
- (c) La valeur de l'énergie mécanique est la même puisqu'elle ne dépend que des modules r_0 et v_0 , pas de leurs directions. On détermine donc les extrêmes de cette trajectoire par intersection de la droite $y = 1,8$ avec la courbe (c).
- (d) Si l'angle θ_0 est aigu, la composante radiale du vecteur \vec{v}_0 est positive : la distance r est initialement croissante et on se déplace de $r_0 = 1,8l_0$, vers M'_1 . Si l'angle θ_0 est obtus, la distance r commence par décroître et on part vers M_1 .

Correction de l'exercice 9

1. (a) Comme vu en cours, on a, en désignant par σ_c le moment cinétique, stationnaire pour un mouvement à force centrale : $\mathcal{E}_{\text{eff}}(r) = \mathcal{E}_{\text{pot}}(r) + \frac{\sigma_c^2}{2mr^2}$.

Cette énergie potentielle ne décrit que la variation de l'énergie cinétique orthoradiale et n'est pas l'opposé d'un travail. De plus, elle dépend des conditions initiales. Ce n'est donc pas une véritable énergie potentielle.

- (b) La conservation de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{\text{eff}}(r)$ donne immédiatement : $\dot{r}^2 = \frac{2(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{\text{eff}}(r))}{m}$, dans les zones accessibles, où $\mathcal{E}_{\text{eff}}(r) \leq \mathcal{E}_m$.



2. (a) Il faut considérer une partie du mouvement sur laquelle r varie monotonement. Le signe de \dot{r} y est constant

et on peut écrire :

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{\text{eff}}(r))}{m}} \rightarrow t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{\text{eff}}(r))}{m}}}$$

- (b) La conservation du moment cinétique permet de calculer $\dot{\theta} = \frac{\sigma_c}{mr^2}$, soit : $\theta - \theta_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{\sigma_c dr}{r^2 \sqrt{2m(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{\text{eff}}(r))}}$

- (c) La variation angulaire au cours d'une $\frac{1}{2}$ -oscillation de r_m à r_M est : $\Delta\theta = \int_{r_m}^{r_M} \frac{\sigma_c dr}{r^2 \sqrt{2m(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{\text{eff}}(r))}}$.

Pour qu'au bout de $m \frac{1}{2}$ oscillations, on ait fait p tours, on doit avoir $2m\Delta\theta = 2p\pi$. On aura alors :

$$T = m \int_{r_m}^{r_M} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{\text{eff}}(r))}{m}}}$$